Ukázka zápočtového testu MAI 2 (LS 2014/15)

1. Na maximálních možných intervalech najděte primitivní funkci

$$\int \frac{\log x + 1}{x\left(\log^3 x + 8\right)}\,dx \quad .$$

(4 body)

2. Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x, kde

$$\omega = \left\{ [x,y] \in R^2;\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le \sqrt{x}\cdot arctg\, x \right\}$$

nebo

Vypočítejte integrál $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. Je tento integrál Riemannův nebo Newtonův? (4 body)

3. Je dána funkce $f(x,y) = \log\left(\sqrt{y+1} - x\right)$.
   a) Najděte definiční obor D funkce g a nakreslete jej.
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
   c) Ukažte, že funkce f je v bodě $[0,0]$ diferencovatelná .
   Určete v tomto bodě totální diferenciál a rovnici tečné roviny .
   d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace f(- 0,04; 0,02).

(4 body)

4. Vyšetřete globální extrémy na množině M a lokální extrémy funkce f uvnitř M, je-li
$f(x,y) = x.\sin y + x^2$ a $M = \left\{[x,y] \in R^2;\ -1 \le x < 1, 0 \le y < \tfrac{7}{4}\pi\right\}$.

(4 body)

nebo

4. Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M , je-li:
$f(x,y,z) = xy + z^2$, $M = \left\{(x,y,z) \in R^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \wedge x \ge 0\right\}$;

nebo (4 body)

4. a) Ukažte, že rovnicí $z^3 + x^3 z - xyz^2 + y^3 - 2 = 0$ a podmínkou $z(1,1) = 1$
   je definována v okolí bodu $(1,1,1)$ implicitní funkce $z = z(x,y), z \in C^1(U(1,1))$.
   b) Pomocí lineární aproximace vypočítejte přibližně hodnotu z(1,01; 0,96).

(4 body)

nebo

4. a) Ukažte, že rovnicí $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 2y + 4 = 0$ a podmínkou $z(3,1) = 1$
   je definována v okolí bodu $(3,1,1)$ implicitní funkce $z = z(x,y) \in C^2(U(3,1))$.
   b) Ukažte, že bod $(3,1)$ je stacionárním bodem funkce $z = z(x,y)$.
   Vyšetřete, zda funkce $z = z(x,y)$ má v bodě $(3,1)$ lokální extrém.

(4 body)